

## Computer-Tomographie (CT)

Die Tomographie ist eine schmerzfreie Untersuchungsmethode, die Bilder des Körperinnern ohne operativen Eingriff liefert. Zur Herstellung dieser Bilder werden Computer benötigt, denn die Bilder werden *errechnet*. Im Prinzip besteht diese Rechnung darin, dass ein großes lineares Gleichungssystem aufgelöst wird. Wie man zu dem Gleichungssystem kommt und wie am Schluss das Bild entsteht, soll mit diesem Programm und den Arbeitsblättern verdeutlicht werden.

### 1. Ermittlung der Messdaten

Der Patient wird so in Position gebracht, dass die darzustellende Schicht im Messbereich liegt. Dann werden von der Apparatur die eigentlichen Messungen durchgeführt.

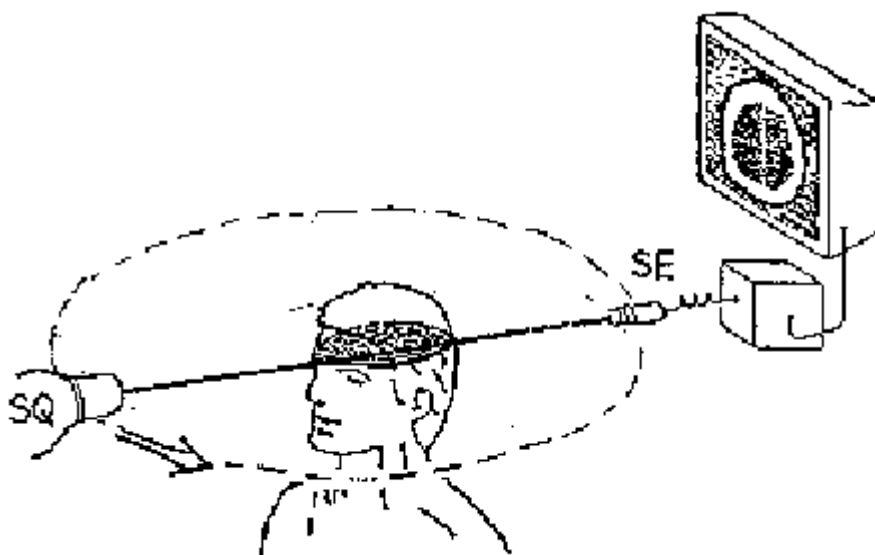


Abb. 1 Messapparatur ( aus <http://www.educeth.ch/mathematik/leitprog/lingl/> Kapitel 5 )

Von einer Strahlenquelle (SQ) wird ein Röntgenstrahl ausgesandt, der die gewählte Schicht des Körpers durchquert und anschließend auf einen Strahlenempfänger (SE) trifft. Dieser Empfänger ermittelt, wie stark der Röntgenstrahl beim Durchgang durch den Körper abgeschwächt wurde.

In realen Geräten wird eine ganze Reihe paralleler Strahlen ausgesandt und im Empfänger einzeln ausgewertet.

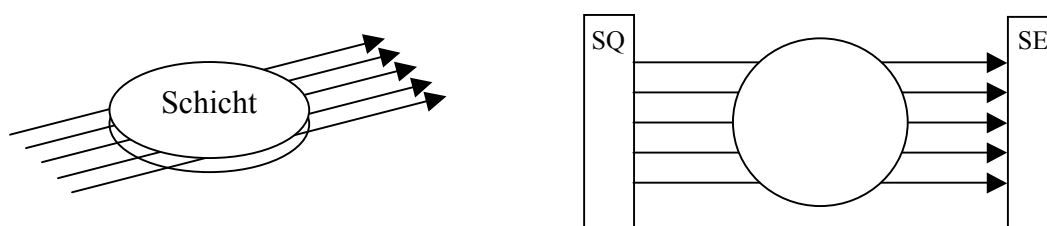


Abb. 2 Schema der Messapparatur von vorne und von oben

Damit kann aber noch kein Bild erstellt werden. Deshalb müssen mehr Messungen gemacht werden, indem der Apparat in bestimmte Positionen weitergedreht und in jeder Position eine Messung durchgeführt wird. Viele parallele Strahlen werden so durch die Schicht gesendet und gemessen und ergeben viele Messwerte.

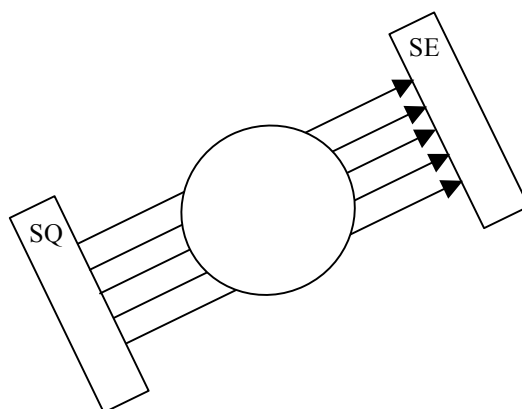


Abb. 3 andere Messposition

## 2. Berechnung des Bildes aus den Messwerten

Das Prinzip der Bilderstellung soll an einem einfachen Modell erläutert werden. Wir unterteilen die betrachtete Schicht zwischen Strahlenquelle und -empfänger in sieben Zellen und zeichnen fünf parallele Röntgenstrahlen ein.

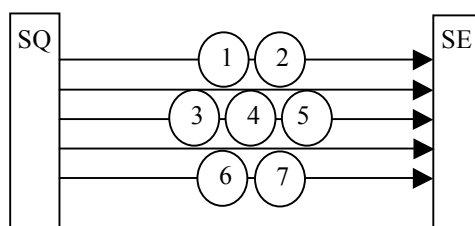


Abb. 4 Unterteilung der zu untersuchenden Schicht

Wir nehmen an, dass alle Strahlen beim Verlassen der Quelle eine Stärke von 100 Einheiten haben. Betrachten wir nun die Strahlen einzeln von oben nach unten.

Der obere Strahl durchquert die Zellen 1 und 2. Er wird beim Durchgang durch Zelle 1 um eine unbekannte Anzahl von Einheiten abgeschwächt. Wir notieren das als Unbekannte  $z_1$ . In der zweiten Zelle wird er um weitere  $z_2$  Einheiten abgeschwächt und tritt dann aus der Schicht aus. Die Stärke, die der Strahl jetzt noch hat, wird vom Empfänger gemessen.

Registriert dieser beispielsweise eine Stärke von 89, so können wir das mit der Gleichung

$$100 - z_1 - z_2 = 89 \quad \text{oder äquivalent} \quad z_1 + z_2 = 11$$

ausdrücken. Wir haben also eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten erhalten.

Der zweite Strahl trifft keine Zellen und liefert damit keine Information.

Der dritte Strahl trifft die Zellen 3, 4 und 5. Wenn wir die unbekannten Anzahlen der „Abschwächungs-“Einheiten mit  $z_3$ ,  $z_4$  und  $z_5$  bezeichnen und beispielsweise ein Messergebnis von 78 im Empfänger erhalten, ergibt sich die Gleichung

$$100 - z_3 - z_4 - z_5 = 78 \quad \text{oder äquivalent} \quad z_3 + z_4 + z_5 = 23$$

Strahl Nummer 4 liefert wieder keine Informationen und Strahl Nummer 5, der die Zellen 6 und 7 durchdringt ergibt bei einem Messergebnis von 83 die Gleichung

$$100 - z_6 - z_7 = 83 \quad \text{oder äquivalent} \quad z_6 + z_7 = 17$$

Aus dieser ersten Messung erhalten wir also drei lineare Gleichungen mit allerdings 7 Unbekannten. Wir können diese Gleichungen zu einem System zusammenstellen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & & = 11 \\ & z_3 + z_4 + z_5 & = 23 \\ & & z_6 + z_7 = 17 \end{array} \right.$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die sieben Unbekannten natürlich nicht eindeutig bestimmen. Zur Bestimmung von 7 Unbekannten braucht man normalerweise 7 Gleichungen. Deshalb wird die Messapparatur in die unten dargestellte Position weitergedreht und dort eine weitere Messung durchgeführt.

Im Empfänger sind direkt die „Abschwächungseinheiten“ angegeben.

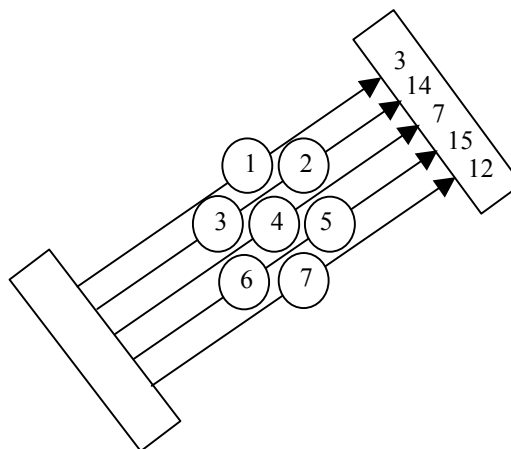


Abb. 5 nächste Messposition

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} (1) & z_1 + z_2 & & & & & & = 11 \\ (2) & & z_3 + z_4 + z_5 & & & & & = 23 \\ (3) & & & & z_6 + z_7 & & & = 17 \\ (4) & z_1 & & & & & & = 3 \\ (5) & & z_2 + z_3 & & & & & = 14 \\ (6) & & & z_4 & & & & = 7 \\ (7) & & & & z_5 + z_6 & & & = 15 \\ (8) & & & & & z_7 & & = 12 \end{array} \right.$$

Dieses System hat genau eine Lösung:  $z_1=3$ ,  $z_2=8$ ,  $z_3=6$ ,  $z_4=7$ ,  $z_5=10$ ,  $z_6=5$ ,  $z_7=12$  (Durch die Messanordnung bedingt ergeben sich lineare Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Gleichungen, so dass tatsächlich nur 7 unabhängige Gleichungen mit 7 Unbekannten vorliegen. Siehe auch nächste Seite.)

Die Interpretation dieser Lösung ist nun naheliegend. Die Zelle 1 schwächt den Strahl um 3 Einheiten ab, die zweite um 8 Einheiten, die dritte um 6 Einheiten usw. Diese Zahlen werden jetzt mit Hilfe einer Grautonskala umgesetzt:

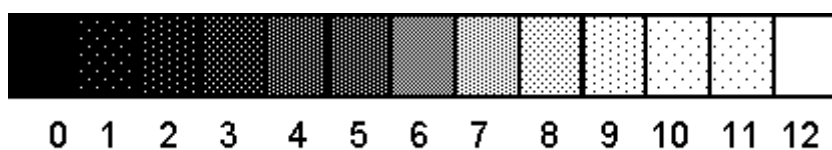


Abb. 9 Grautonskala

Zelle 1 wird also mit dem Grauton Nummer 3 eingefärbt, die zweite mit dem Ton Nummer 8, die dritte mit Ton Nummer 6 usw. So entsteht das "CT-Bild" dieser Schicht:

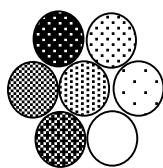
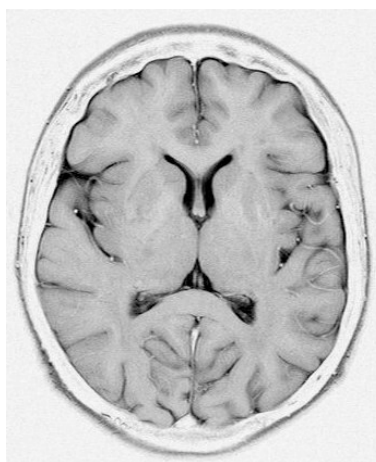


Abb. 10 CT-Bild der Schicht

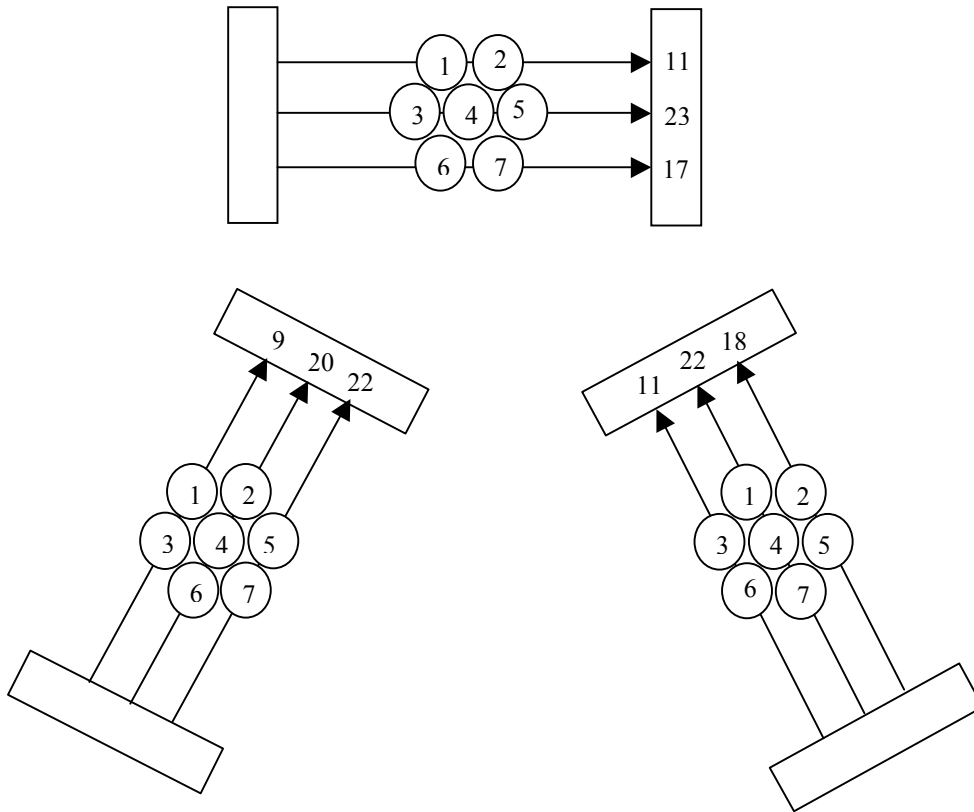
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein CT-Bild einer Kopfschicht

( von einer nicht namentlich genannten Person zur Verfügung gestellt )



### 3. Lineare Abhängigkeiten

Dass die durch die Messanordnung entstehenden linearen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Gleichungen noch größer sein können, zeigt das folgende Messbeispiel:



Diese Messungen liefern das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{lclclclclcl}
 (1) & z_1 & + & z_2 & & & & & & = & 11 \\
 (2) & & & & z_3 & + & z_4 & + & z_5 & & = & 23 \\
 (3) & & & & & & & & & z_6 & + & z_7 & = & 17 \\
 (4) & z_1 & & & & + & z_3 & & & & & & = & 9 \\
 (5) & & z_2 & & & + & & z_4 & + & & z_6 & & = & 20 \\
 (6) & & & & & & & & z_5 & + & & z_7 & = & 22 \\
 (7) & & & & z_3 & & & & & + & z_6 & & = & 11 \\
 (8) & z_1 & & & & + & & z_4 & + & & & z_7 & = & 22 \\
 (9) & & z_2 & & & + & & & z_5 & & & & = & 18
 \end{array} \right.$$

Obwohl dieses System bei der gleichen Anzahl von Unbekannten eine Gleichung mehr enthält als das erste Beispiel, hat es trotzdem unendlich viele Lösungen. Die linearen Abhängigkeiten sind hier so groß, dass tatsächlich nur 6 unabhängige Gleichungen mit 7 Unbekannten vorliegen.

Um zu eindeutigen Bildern zu kommen, müssen demnach i.d.R. wesentlich mehr Gleichungen als Unbekannte vorliegen.

#### 4. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

Bei Messungen an realen Körperschichten ergeben sich tausende von Unbekannten und Gleichungen. Hier sind die bekannten „klassischen“ Methoden praktisch unbrauchbar.

Eine effektive Lösung großer linearer Gleichungssysteme ist mit Hilfe des Computers und einer iterativen Methode möglich. Die Grundidee der iterativen Lösungsmethode ist einfach zu verstehen und lässt sich leicht programmieren.

Wir wollen das Verfahren am obigen Beispiel verdeutlichen. Es besteht aus drei Schritten.

##### 1. Schritt: **Startwerte ermitteln**

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) werden Näherungswerte für  $z_1$  bis  $z_7$  ermittelt, indem jeweils der Wert auf der rechten Seite der Gleichung gleichmäßig auf die Unbekannten aufgeteilt wird:

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &= \frac{11}{2} = 5,5 \\ z_3 = z_4 = z_5 &= \frac{23}{3} \approx 7,7 \\ z_6 = z_7 &= \frac{17}{2} = 8,5 \end{aligned}$$

##### 2. Schritt: **Näherungswerte verbessern**

Die Näherungswerte aus Schritt 1 werden in die weiteren Gleichungen eingesetzt und der so erhaltene Wert jeweils mit dem „Sollwert“ (rechte Seite der Gleichung) verglichen.

Eine sich ergebende Abweichung wird zu gleichen Teilen auf die beteiligten Variablen aufgeteilt.

In unserem Beispiel sieht das für Gleichung (4) folgendermaßen aus:

$$z_1 + z_3 = \frac{11}{2} + \frac{23}{3} = \frac{79}{6} = 13\frac{1}{6}$$

Der Sollwert ist 9, die Abweichung somit  $4\frac{1}{6}$  (zuviel)

Man erhält bessere Näherungswerte, indem man die Hälfte dieser Abweichung von den bisherigen Näherungswerten  $z_1$  und  $z_3$  subtrahiert:

$$z_1 = z_1 - \frac{25}{12} = \frac{11}{2} - \frac{25}{12} = \frac{41}{12} \approx 3,4$$

$$z_3 = z_3 - \frac{25}{12} = \frac{23}{3} - \frac{25}{12} = \frac{67}{12} \approx 5,6$$

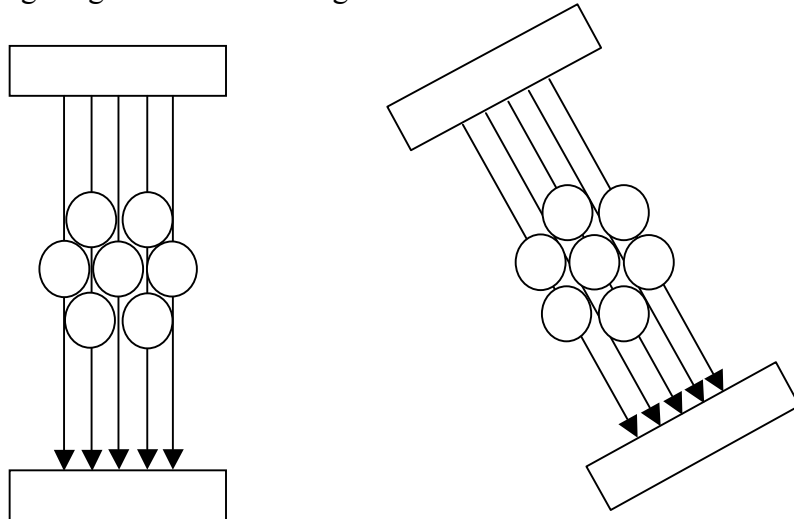
##### 3. Schritt: **Schleife ( Näherungswerte immer weiter verbessern )**

Die ermittelten Näherungswerte werden immer wieder in die Gleichungen (1) bis (9) eingesetzt und die Abweichungen auf die Variablen verteilt bis die größte Abweichung unterhalb einer vorgegebenen Schranke (z.B. 0,001) liegt.

## Arbeitsblatt 1/2

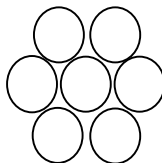
**Bitte unbedingt beachten:** Anders als in den Informationen zur CT sind die Abschwächungseinheiten der Zellen im Programm folgendermaßen festgelegt: Schwarz = 3, Dunkelgrau = 2, Hellgrau = 1 und Weiß = 0

1. Stellen Sie den Tomographen auf 7 Zellen ein ( Tomograph → Einstellungen )
2. Verdecken Sie die Zellschicht und erzeugen Sie ein Zufallsmuster.
3. Durchstrahlen Sie die Schicht in den folgenden Positionen und notieren Sie die im Empfänger angezeigten Abschwächungswerte.



4. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.
5. Lösen Sie das Gleichungssystem und färben Sie die Schicht dem Ergebnis entsprechend.

( 0 =  1 =  2 =  3 =  )



6. Decken Sie die Schicht auf und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.

## Arbeitsblatt 2/2

7. Durchstrahlen Sie die gleiche Schicht in den Messpositionen 2, 4 und 6 und stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf. ( Messposition 1 ist die „12 Uhr“-Position der Strahlenquelle, Messposition 2 ist die „11-Uhr“-Position, usw. )
8. Weisen Sie nach, dass dieses System keine eindeutige Lösung besitzt.
9. Stellen Sie den Tomographen auf 19 Zellen ein.
10. Sorgen Sie mit den Einstellungen „Anzahl der automatischen Messungen = 3“ und „Beginn der Messung bei Position 2“ dafür, dass bei der automatischen Messung 19 Gleichungen entstehen. (5 Gleichungen in Position 2, 9 Gleichungen in Position 3 und wiederum 5 Gleichungen in Position 4)
11. Überzeugen Sie sich davon, dass mit 19 Gleichungen selbst bei der größten zugelassenen Abweichung keine eindeutigen Bilder erstellt werden können (die Zellen mit größeren Abweichungen von der Ganzzahligkeit werden rot dargestellt).
12. Einstellung auf „Beginn der Messung bei Position 1“ liefert 23 Gleichungen ( $9 + 5 + 9 = 23$ ).  
Weisen Sie nach, dass auch dann kein befriedigendes Ergebnisbild entsteht.
13. Mit 4 Messungen ab Position 1 ergeben sich 28 Gleichungen.  
Überprüfen Sie, ob sich in diesem Fall bei verschiedenen Mustern jeweils korrekte Bilder ergeben.